Welke (didactische) aanpak om evenredigheidsvergelijkingen op te lossen binnen de context van de natuurkunde werkt voor leerlingen uit de onderbouw van het voortgezet onderwijs ?

Beantwoord door Zeger-Jan Kock (antwoordspecialist) en Christa Teurlings (kennismakelaar Kennisrotonde)

15 juli 2020 – update 23 oktober 2023

KR. 916

Kort antwoord

Er zijn in de literatuur enkele lessenseries beschreven en onderzocht, die beogen dat leerlingen effectief leren werken met breuken, verhoudingen en evenredigheidsvergelijkingen. Deze lessenseries baseren zich op aandachtspunten die voortkomen uit wiskunde-didactisch onderzoek en uit onderzoek naar het gebruik van wiskunde in de natuurkunde.

Twee aandachtspunten zijn het leren redeneren met breuken, verhoudingen en evenredigheden, en het werken met verschillende wiskundige representaties (zoals tekst, formules, grafieken, tabellen en figuren). Een derde aandachtspunt is leerlingen te ondersteunen bij het zien van overeenkomsten tussen wiskundige en natuurkundige contexten. Een vierde aandachtspunt is leerlingen te helpen bij het zien van de samenhang tussen wiskundige begrippen, procedures en oplossingsstrategieën die hoort bij het oplossen van vergelijkingen. Het beperkte onderzoek naar deze samenhangende lessenseries toont voorlopig een neutraal tot klein positief effect aan.

Antwoord

Bij evenredigheidsvergelijkingen in de natuurkunde gaat het hier om een recht evenredig verband tussen twee variabelen. Evenredigheidsvergelijkingen in de natuurkunde hebben in de onderbouw gewoonlijk betrekking op twee variabelen, waartussen een recht evenredig verband bestaat. Voorbeelden uit de onderbouw zijn de relatie tussen afstand, constante snelheid en tijd ($s = v\ t$) en de relatie tussen massa en dichtheid ($m = \rho\ V$).

Een rechte lijn door de oorsprong van een grafiek geeft zo'n vergelijking weer, waarbij de helling van de lijn een natuurkundige betekenis heeft. In de gegeven voorbeelden zijn dat de snelheid $v = s / t$ en de dichtheid $\rho = m / V$.

Om evenredigheidsvergelijkingen op te kunnen lossen hebben leerlingen meerdere vaardigheden nodig, ook uit de wiskunde. Ten eerste moeten zij kunnen werken met breuken, verhoudingen en evenredigheden (Howe et al., 2015a). Ten tweede moeten zij inzicht hebben in en begrip hebben van de verschillende wiskundige representaties van een evenredig verband, zoals bijvoorbeeld in tekst, in een

formule, grafiek of figuur wordt weergegeven (Ceuppens, 2019). Ten derde moeten zij de wiskundige vaardigheden kunnen inzetten in een natuurkundige context, en de natuurkundige betekenis van de constanten en variabelen begrijpen (Ceuppens e.a., 2019). Ten vierde hebben zij vaardigheden nodig om vergelijkingen op te lossen (Drijvers & Kop, 2008).

Lessenseries gericht op verhoudingen en evenredigheidsvergelijkingen

Er zijn inmiddels enkele lessenseries ontwikkeld waarin de genoemde vaardigheden aandacht krijgen. Zo zijn er in Groot-Brittannië lessenseries ontwikkeld voor de vo onderbouw van wiskunde en natuurkunde, waarin het werken met breuken, verhoudingen en evenredigheden veel aandacht krijgt. Bij wiskunde ging het om breuken, verhoudingen, decimale getallen en percentages; bij natuurkunde ging het over het begrip “kracht” en de evenredige verbanden die daarbij een rol spelen. In de lessen speelde interactie tussen leerlingen een grote rol, hetzij in kleine groepen, hetzij in de hele klas. De rol van de leraar was meer het leiden van de gesprekken dan het geven van juiste antwoorden.

De lessen zijn getest onder honderden leerlingen in tientallen klassen in Groot-Brittannië, met controlegroepen die traditioneel onderwijs kregen. De wiskundelessen gaven een positief, maar vrij klein, effect op de prestaties van de leerlingen te zien. De resultaten van de natuurkundelessen lijken ook positief, maar zijn niet helemaal eenduidig, omdat de klassen niet volledig vergelijkbaar waren, en de lessen waarschijnlijk niet precies zijn uitgevoerd zoals bedoeld was (Howe et al., 2015a, 2015b).

De Universiteit Utrecht heeft samen met docenten lessenseries ontworpen voor zowel wiskunde als natuurkunde in klas 2 havo/vwo om leerlingen te leren werken met verhoudingen en evenredigheden (Mooldijk & Sonneveld, 2010). Vergelijkbare lessenseries, met aandacht voor evenredige verbanden, bestaan er voor 4 havo en 4 vwo. De lessen zijn gebaseerd op actieve deelname van de leerlingen. Er is sprake van een combinatie van leren in groepen, individueel leren en klassendiscussies. Tevens maken de lessen gebruik van contexten, werken de lessen met voorbeelden en wordt de voorkennis geactiveerd.

Docenten die de lessenserie gebruikten waren positief over het toegenomen begrip van hun leerlingen. Er is ook op kleine schaal onderzoek gedaan naar de effectiviteit van de lessenserie voor klas 2. De resultaten wijzen niet op betere, maar ook niet op slechtere prestaties van de leerlingen die de lessenserie hebben gevolgd (Van Es, 2016).

Didactische uitgangspunten van deze lessenseries

De lessenseries baseren zich op diverse indicaties uit het wiskunde-didactisch onderzoek en op aanbevelingen uit onderzoek naar het gebruik van wiskunde in de natuurkunde. Deze indicaties en aanbevelingen richten zich op de vereiste vaardigheden voor het oplossen van evenredigheidsvergelijkingen.

- Leren redeneren met breuken, verhoudingen en evenredigheden

Een uitgangspunt van de lessenseries is expliciet aandacht te besteden aan het leren redeneren en werken met breuken, verhoudingen en evenredigheden. Onderzoek heeft laten zien dat leerlingen natuurkundige

problemen beter kunnen oplossen als ze daarvoor wiskundige vaardigheden kunnen inzetten (Schwartz e.a., 2005). Onderzoekers verwachten daarom dat leerlingen beter overweg kunnen met evenredigheidsvergelijkingen in de natuurkunde als zij vaardig zijn in het werken en redeneren met breuken en verhoudingen zoals binnen rekenen en wiskunde (Howe e.a. 2015a, 2015b).

- Gegevens relateren uit diverse representaties (tekst, formules, grafieken, tabellen en figuren)

Een tweede uitgangspunt is leerlingen te laten oefenen met het werken met verschillende representaties. Uit empirisch onderzoek is immers gebleken dat leerlingen dit lastig vinden (Ceuppens, 2019). Op basis hiervan verwachten onderzoekers dat leerlingen hun inzicht en flexibiliteit kunnen vergroten door te oefenen in het werken met verschillende representaties (zie bijvoorbeeld Drijver & Kop, 2008). Denk daarbij aan het relateren van de helling van een lijn aan gegevens uit een tabel of aan het construeren van een grafiek uit een formule.

- Verbanden gaan zien tussen wiskundige en natuurkundige contexten

Een derde uitgangspunt is leerlingen expliciet de overeenkomst te tonen tussen evenredigheid in wiskundige en natuurkundige contexten. Denk aan het naast elkaar uitwerken van de helling in een x-y grafiek in de wiskunde en de snelheid in een tijd-plaats grafiek in de natuurkunde. Gebleken is namelijk dat leerlingen dezelfde vraag in een natuurkundige context gemiddeld slechter beantwoorden dan in een wiskundige context (Planinic e.a., 2012). Leerlingen kunnen bijvoorbeeld niet de snelheid bepalen uit een tijd-plaats grafiek, terwijl ze wel in staat zijn de helling in een x-y grafiek te bepalen (Ceuppens e.a., 2019).

- Gaan zien en begrijpen van samenhang tussen begrippen, procedures en strategieën

Een vierde uitgangspunt is leerlingen de samenhang te laten zien tussen verschillende wiskundige begrippen, procedures en oplossingsstrategieën. Dat dit belangrijk is, komt naar voren uit wiskunde-didactische literatuur over het oplossen van vergelijkingen en is gebaseerd op een synthese van onderzoek (Drijver & Kop, 2008).

Drijver en Kop (2008) adviseren daarbij te beginnen met concrete problemen, in een herkenbare context. Leerlingen proberen dan eerst zelf een oplossing en komen via klassendiscussies tot gedeelde inzichten. De meer formele wiskundige procedures en basisvaardigheden leren ze pas daarna. Drijver en Kop veronderstellen tevens dat leerlingen de samenhang beter gaan begrijpen als zij oefenen in het onderscheiden van verschillende soorten verbanden en hun oplossingsmethoden. Voorbeelden hiervan zijn recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden.

Het onderzoek naar de lessenseries laat voorlopig een neutraal tot licht positief effect zien

In de genoemde lessenserie komen bovenstaande didactische uitgangspunten in verschillende mate aan de orde. Ook is er onderzoek naar deze lessenseries beschikbaar, zij het slechts voor een deel van het materiaal, met beperkingen in de onderzoeksmethode en deels kleinschalig. Het beperkt beschikbare onderzoek laat voorlopig nog een neutraal tot klein positief effect zien.

De lessenseries laten wel inspirerende voorbeelden zien: het zijn manieren waarop leraren de bovengenoemde aandachtspunten in de praktijk kunnen vormgeven. Onderzoekers erkennen dat het vooral gaat om deze aandachtpunten en dat leraren details van de concrete lessen in de praktijk (op basis van hun professionele oordeel) aan dienen te passen aan het leerproces van hun leerlingen en aan de context van hun school (vergelijk Gravemeijer e.a., 2006). Belangrijk daarbij is dat leraren nagaan of en hoe de genoemde aandachtspunten uit de lessenseries in de eigen werkpraktijk het gewenste effect gaan sorteren.

Geraadpleegde bronnen

Ceuppens, S. (2019). *Learning of physics and mathematics concepts in an integrated STEM curriculum [PhD Thesis].* Leuven: KU Leuven.

Ceuppens, S., Bollen, L., Deprez, J., Dehaene, W., & De Cock, M. (2019). 9th grade students' understanding and strategies when solving x(t) problems in 1D kinematics and y(t) problems in mathematics. *Physical Review Physics Education Research, 15*(1), 1-22.

Drijver, P., & Kop, P. (2008). Vergelijkingen vergelijken. In: P. Drijvers, A. v. Streun, & A. Zwaneveld, (Ed.), *Handboek vakdidactiek wiskunde. Handboek voor de lerarenopleiding*. (pp. 53-83). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 18-51). London, England: Routledge.

Howe, C., Luthman, S., Ruthven, K., Mercer, N., Hofmann, R., Ilie, S., & Guardia, P. (2015a). Rational number and proportional reasoning in early secondary school: towards principled improvement in mathematics. *Research in Mathematics Education, 17*(1), 38-56.

Howe, C., Ilie, S., Guardia, P., Hofmann, R., Mercer, N., & Riga, F. (2015b). Principled Improvement in Science: Forces and proportional relations in early secondary-school teaching. *International Journal of Science Education, 37*(1), 162-184.

Mooldijk, A., & Sonneveld, W. (2010). Coherent education in mathematics and physics: the theme of proportionality in mathematics and physics. In: N. Valadines (Ed.), *Trend in Science and Mathematics Education (TiSME)* (pp. 43-50). Cyprus: Cassoulides.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A., & Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1393-1414.

Schwartz, D. L., Martin, T., & Pfaffman, J. (2005). How mathematics propels the development of physical knowledge. *Journal of Cognition and Development, 6*(1), 65-88.

Van Es, M. C. A. (2016). *The effectiveness of the SaLVO pedagogy on students' performance on proportionality.* (Master Thesis). Utrecht: Utrecht University.

Over deze vraag

Opgesteld door:	Zeger-Jan Kock (antwoordspecialist) en Christa Teurlings (kennismakelaar Kennisrotonde)
Vraagsteller:	Lerarenopleider
Onderwijssector:	vo (onderbouw)
Trefwoorden:	Natuurkunde, wiskunde, didactiek, evenredigheidsvergelijkingen
Referentie:	Kennisrotonde. (2023). *Welke (didactische) aanpak om evenredigheidsvergelijkingen op te lossen binnen de context van de natuurkunde werkt voor leerlingen uit de onderbouw van het voortgezet onderwijs* (1e update) (KR. 916).

Dit antwoord is gepubliceerd op Kennisrotonde.nl. De Kennisrotonde is samen met NCO en Onderwijskennis een dienst van het NRO.